Красный уровень

1. (5 баллов) В магазин привезли на равную сумму конфеты по цене 100 и 400 рублей за килограмм. За сколько рублей надо продавать килограмм смеси этих конфет, чтобы сохранить такую же выручку?

Ответ: 160

Решение. Так как конфеты двух видов стоят поровну, то первых конфет вчетверо больше, то есть на каждый килограмм вторых конфет приходится 4 кг первых. Иначе говоря, 5 кг смеси конфет дают выручку 800 р. Поэтому правильная цена такой смеси - 160 рублей за килограмм.

2. (5 баллов) В ящике лежат 2018 белых шаров, 2019 красных, 2020 синих и 1000 чёрных. Какое наименьшее число шаров нужно взять из ящика, не заглядывая внутрь, чтобы среди взятых шаров наверняка оказались шары хотя бы трёх разных цветов?

Ответ: 4040.

Решение. Если взять всего 4039 шаров, то все они могут оказаться синими и красными, то есть трех разных цветов не будет. Если же взять хотя бы на шар больше, то будут представлены хотя бы три цвета, потому что никакая пара цветов в сумме не может дать такого числа шаров.

3. (8 баллов) В прямоугольном треугольнике наименьшая высота вчетверо короче гипотенузы. Во сколько раз самый большой угол этого треугольника больше самого маленького из углов?

Ответ: в 6 раз.

Решение: наименьшая высота - высота, проведенная к гипотенузе. Известно, что медиана, проведенная к гипотенузе, вдвое короче ее, поэтому высота в искомом треугольнике вдвое короче медианы. Значит, угол между медианой и гипотенузой равен 30 градусам. Дальше рассмотрим равнобедренный треугольник, вершина которого находится в середине гипотенузы, а основание - больший катет. Угол при его вершине равен 150°, поэтому углы при основании равны по 15°. 15 градусов - величина наименьшего из углов исходного треугольника, а наибольший угол - 90°, то есть вшестеро больше.

4. (8 баллов) В первом сосуде находилось 100 г 10% раствора соли, во втором сосуде – 200 г 20% раствора этой же соли и так далее, в десятом сосуде находилось 1000 г 100% раствора. Все растворы слили в один сосуд. Каково процентное содержание соли в полученном растворе?

Ответ: 70%

Решение. Общая масса раствора 5500 г, а количество соли в нем равно 10+40+90+...+1000 = 3850 г. 3850/5500 = 0.7

5. (10 баллов) Если первую цифру трехзначного числа увеличить на n, а вторую и третью цифры уменьшить на n, то полученное число окажется в n раз больше исходного. Найдите сумму числа n и исходного числа.

Ответ: 180 (178+2)

Решение. Пусть трехзначное число равно $T = 100a+10b+c$ (a,b,c - его цифры в разрядах сотен, десятков, единиц соответственно). Тогда увеличение на n первой цифры с уменьшением двух остальных даст число $100(a+n)+10(b-n)+(c-n) = 100a+10b+c + 89n = T+89n$. По условию, это равно nT. То есть имеем уравнение $T+89n = nT$, или $89n = (n-1)T$. Так как 89 - простое число, а $(n-1)T$ должно делиться на 89, то T делится на 89. Положив $T=89k$, получим после сокращения уравнение $n=(n-1)k$. Но это значит, что n делится на n-1, а это возможно только при n=2. Отсюда k=2 и T=2*89=178.

6. (10 баллов) На окружности лежат 2018 точек. Какое наибольшее число непересекающихся хорд можно провести через них (хорды, имеющие общую вершину, считаем непересекающимися)?

Ответ: 4033

Решение. Полученное в итоге разбиение 2018-угольника непересекающимися диагоналями будет триангуляцией - то есть все внутренние многоугольники должны быть треугольниками. Действительно, если внутри есть один многоугольник с большим числом углов, то в нем можно провести еще диагональ, которая разобьет его на два новых многоугольника - то есть число хорд вначале не было максимальным. Теперь сосчитаем общее число таких треугольников. Для этого учтем, что сумма внутренних углов 2018-угольника равна 2016*180°, а сумма угловкаждого треугольника равна 180°. Так как никаких иных вершин и углов у этих треугольников нет, то сумма углов во всех треугольниках также должна быть равна 2016*180°, а это значит, что треугольников ровно 2016. И, наконец, сосчитаем число сторон в этих треугольниках. У каждого из них три стороны, 3*2016=6048. Однако 2018 из проведенных сторон - это внешние стороны исходного многоугольника, они сосчитаны один раз, а все остальные стороны - внутренние, то есть общие для двух треугольников, поэтому они сосчитаны дважды, а всего их вдвое меньше. Таким образом, всего хорд проведено 2018 + (6048-2018)/2 = 2018 + 2015 = 4033.

7. (12 баллов) Саша нашел в старом задачнике такую задачу: "*У 40 пассажиров автобуса были только монетки 10, 15 и 20 копеек – всего ___ монеток. Проезд стоит 5 копеек, которые надо кинуть в кассу, чтоб оторвать билетик. Докажите, что пассажиры не смогут расплатиться друг с другом и заплатить за проезд.*" К сожалению, на том месте, где в условии указывалось общее количество монеток, кто-то поставил жирную кляксу. Какое число, скорее всего, стоит под этой кляксой?

Ответ: 49.

Решение. Понятно, что если монеток много, то их уже может хватить. Например, можно организовать уплату так: 5 копеек = 20-15, 5 копеек = 15-10, 5 копеек = 2*10-15.

При этом каждый пассажир, у которого есть только 10-копеечные, должен расплачиваться ими, а каждый из остальных должен расплачиваться так. чтобы 15-копеечных в расплате хватило на сдачу обладателям 10- и 20-копеечных. Например, если у десяти пассажиров есть по две 10-копеечных монеты, еще у десяти есть 20-копеечные монеты, а у всех остальных есть по 15-копеечной монете, то этого количества монет (20+10+20=50) уже хватает для уплаты в кассу и получения сдачи. Число под кляксой должно делать задачу верной и при этом (см. "скорее всего" в условии) являться максимальным таким числом. Поэтому оно меньше 50. Докажем, что при 49 монетах задача становится верной, то есть решим задачу для 49 монет. Действительно, чтобы уплатить два рубля в кассу, нужны по крайней мере 10 монет, а чтобы получить сдачу, каждый из них должен оставить себе по крайней мере одну монету - на это уйдет еще 40 монет. Так как 10+40>49, то при 49 монетах сделать и то, и другое не получится.

8. (12 баллов) На основании BC треугольника ABC взята точка D так, что BD=AC. Оказалось, что угол DAB прямой, а угол DAC втрое меньше угла ABC. Найдите градусную величину угла BAC.

Ответ: 105°.

Решение. Решим эту задачу с помощью палочки-выручалочки - тригонометрии. Обозначим x величину угла DAC, тогда ABC=3x, ACB=180-3x-(90+x)=90°-4x. Так как ACB=90°-4x - положительный угол, то 4x<90°. По теореме синусов, применённой к треугольнику ABC, AC/sin(3x)=AB/sin(90°-4x)=AB/cos(4x), то есть AB/AC=cos(4x)/sin(3x). А так как угол BAD по условию прямой и AC=BD, то AB/AC = AB/BD = cos(3x).

Таким образом, cos(4x)/sin(3x)=cos(3x); cos(4x)=sin(3x)cos(3x)=0.5sin(6x). В этом равенстве слева стоит косинус, то есть функция, убывающая на промежутке от 0 до 180°, а справа - синус, то есть возрастающая на этом промежутке функция. Поэтому их графики могут пересекаться не более чем в одной точке, то есть уравнение может иметь не более одного решения. Эту точку пересечения графиков легко найти: если 6x=90°, то sin(6x)=1, 0.5sin(6x)=0.5, и одновременно cos(4x)=cos(60°)=0.5. Таким образом, x=15 годится, а других решений (по доказанному выше) быть не может. Величина угла BAC равна 90°+15°=105°.

9. (15 баллов) Последовательность a_n задана следующим образом: $a_1 = 0$, $a_{2n+1} = a_{2n} = n-a_n$. Найдите какое-нибудь n>2000, для которого $a_n = n/3$.

Ответ: например, n=3072.

Решение. По индукции можно показать, что нужным свойством обладают числа, для которых n/3 - степень двойки. Действительно, a_3072 = 1536 - a_1536 = 1536 - 768 + a_768 = 1536 - 768 + 384 - a_384 = ... = 3(512-256+128-64+32-16+8-4+2-1) +1 = 3*341 + 1 = 1024.

10. (15 баллов) В 64 кошельках лежали копеечные монетки – кошелёк №1 был пустым, в кошельке №2 лежала одна копейка, в кошельке №3 – две, ..., в кошельке №64 лежали 63 копеечные монетки. Один из кошельков опустошили, а все монетки из него разложили (по одной) в кошельки с меньшими номерами. В нашем распоряжении есть весы со стрелкой, и за одно взвешивание разрешается взять любые кошельки и взвесить все их монеты – то есть узнать суммарную массу всех монет в выбранных кошельках (одна копеечная монета весит 1 г). За какое наименьшее число взвешиваний можно узнать номер опустевшего кошелька?

Ответ: за одно.

Решение. Достаточно взвесить монеты из кошельков с нечётными номерами. До перекладывания в них было 2*(1+2+...31) = 992 монеты. Если опустошён один из них, то ровно половина его монет оказалась в кошельках с меньшими нечётными номерами, и узнав, насколько общий вес меньше 992, мы однозначно восстановим, какой именно кошелек стал пустым. Если же опустошен один из чётных кошельков, то общий вес в нечетных стал больше 992, и по тому, на сколько больше, мы снова однозначно вычислим номер опустевшего кошелька.